Les portes sur l'univers. Sulla creatività matematica in Grothendieck

Fernando Zalamea
Universidad Nacional de Colombia

Abstract. *We present a synthetic vision of Les portes sur l'univers (1986), the appendix that Grothendieck wrote for Récoltes et semailles, where he studies the problematics of mathematical creativity, and we apply that vision (i) to the understanding of Grothendieck's own work around 1955, and (ii) to a dynamic reading of some correlations between creativity, academics and teaching.*

Keywords: Grothendieck, mathematics, philosophy, creativity, synthesis

Sunto. *Presentiamo una visione sintetica de Les Portes sur l'univers (1986), l'appendice che scrisse Grothendieck per Récoltes et semailles, nel quale studia la problematica della creatività matematica, e applichiamo questa visione (i) alla comprensione dell'opera stessa di Grothendieck attorno al 1955, e (ii) a una lettura dinamica di alcune correlazioni tra creatività, accademia e docenza.*

Parole chiave: Grothendieck, matematica, filosofia, creatività, sintesi

1. Introduzione

Usualmente l'accesso alla creatività matematica si presenta attraverso giochi concreti ed esempi curiosi, cercando di approfittare così del carattere ludico del gesto ed eccitare la curiosità del lettore. Procederemo qui, invece, da una prospettiva totalmente diversa –diremmo ortogonale– nella quale l'accesso alla creatività si realizza a partire da una *concettualizzazione generale* e da un'*analisi metodologica*, cercando di evidenziare così il carattere riflessivo del pensiero ed affinare la comprensione del lettore. Esistono vari testi di grandi matematici in questa direzione (*L'invenzione matematica*, un capitolo di *Scienza e Metodo*, 1908, di Poincaré è una delle vette più alte del genere); ma l'opera *Le porte sull'universo* (1986) di Grothendieck merita di essere posta senza dubbio in una posizione di rilievo.

In questo articolo ci addentreremo in questo universo affascinante, che richiederebbe un trattato assai più vasto per poter trarre vantaggio dalla sua immensa ricchezza. Nel *Paragrafo 1* presentiamo gli aspetti fondamentali del testo, e riassumiamo alcune delle riflessioni di Grothendieck sui processi creativi in generale e matematici in particolare. Nel *Paragrafo 2* applichiamo quanto appreso per addentrarci nei processi creativi dello stesso Grothendieck, attorno al 1955, anno del suo "passaggio" verso la geometria algebrica. Nel

Paragrafo 3 approfitteremo delle indicazioni contenute nel documento per effettuare speculazioni su una relazione viva e dinamica fra creatività, accademia e docenza. E infine, in un'Appendice proponiamo un riassunto ristretto ma sufficientemente preciso de *Les portes sur l'univers* per un suo eventuale uso in altri contesti che permettano di far avanzare una filosofia non riduzionista della matematica.

2. *Les portes sur l'univers*

Dopo un risorgere appassionato dei suoi interessi matematici fra il 1981 e il 1984 (*La longue marche à travers la théorie de Galois*, *Pursuing Stacks*, *Esquisse d'un programme*, nei quali pone le basi di temi assolutamente profondi e nuovi come la geometria anabeliana, la strutturazione categorica della teoria di Teichmüller, i disegni di bambini e la topologia moderata), Grothendieck realizza fra il 1985 e il 1986 il suo non certo comune trattato di riflessione sulla matematica (pensiero, invenzione, comunità) nel suo diario *Récoltes et semailles* (*Raccolte e semine*) (Grothendieck, 1985-86). Si tratta di un lavoro notevole, tanto in quantità (1252 pagine) come in qualità (un'analisi assai incisiva all'interno delle fonti dell'immaginazione matematica), del quale i lettori successivi hanno posto in evidenza sfortunatamente solo gli aspetti aneddotici della sua diatriba contro la comunità matematica, ma nel quale la capacità introspettiva di Grothendieck raggiunge alcuni dei suo momenti migliori nel mettere in evidenza la sua analisi della creatività. In particolare, l'appendice a *Récoltes et semailles, Les portes sur l'univers* (che indicheremo con PU d'ora in avanti nelle citazioni), 127 pagine scritte fra il 17 di marzo e il 14 di aprile del 1986, costituisce un favoloso documento sulle tensioni complesse del pensiero in generale e matematico in particolare.

Grothendieck – vicino da sempre alla filosofia orientale, praticante yoga fin dalla sua rinuncia al IHES (Institut des Hautes Études Scientifiques, Parigi) (1970) e dai suoi anni di ecologista radicale nel movimento *Survivre et vivre* (1970-75) – adotta in *Les portes sur l'univers* un sofisticato sistema di ramificazioni di coppie *yin/yang* per addentrarsi nello studio dell'azione umana e, in modo speciale, della matematica. Nel lato *yin* si trovano i processi di scoperta, la leggerezza, il linguaggio madre dell'intuizione. Nel lato *yang* appaiono i canali dell'invenzione, l'architettonica, i linguaggi superficiali della descrizione. Nel *yin* giace il cuore, nel *yang* risiede la ragione [nella nostra lettura vale la pena notare la dualità piena, valida solo in castigliano: *co-razón* (cuore) – *razón* (ragione); in questa lingua si esprime infatti la tensione sensibile – intellegibile mediante l'*esatto* prefisso duale "co"]. Grothendieck continua a costruire una combinatoria stratificata di legami parziali di coppie *yin/yang*, nelle quali appaiono ad un primo livello "poligamie" (uno *yang* connesso con due *yin*, per esempio, sole con luna e terra) e "poliandrie" (un *yin* intrecciato con due *yang*, per esempio terra con sole e cielo) [PU 7-8]. A un secondo livello, si realizzano diagrammi a zig zag, dove si sovrappongono e cambiano di prospettiva gli *apparenti* opposti [PU 8-10]. I legami variabili *yin/yang* possono dar luogo dunque a "cicli chiusi" nei quali un ciclo *yin/yang* ci permette di vedere con nuove prospettive una situazione data [PU 12]:

> Il fiume si getta nel mare che lo accoglie. La barca si immerge nel fiume che lo circonda e che lo avvolge. L'equipaggio è portato dalla barca che l'avvolge e lo protegge. Il giovane mozzo è membro e parte dell'equipaggio che lo include. E nei suoi occhi si riflette il mare, e attraverso i suoi occhi il mare penetra nella sua anima, che lo accoglie in sé. Così il maschile e il femminile –Eros e la Madre – si intrecciano costantemente in un ciclo senza fine nel quale ogni cosa, contemporaneamente o successivamente, vive il suo impulso virile e la sua pulsione materna.

Il mare e il mozzo ci ricordano la caduta di Pip negli abissi (sappiamo da una testimonianza di John Tate che *Moby Dick* era il racconto favorito di Grothendieck), frammento della problematica tipicamente romantico/matematica sui riflessi del Tutto sulla parte. Di fatto, l'iterazione e la riflessione (codificate nel ciclo anteriore, e disegnate in Figura 1) sono tipiche dei processi inventivi in matematica, come vedremo in dettaglio nel *Paragrafo 2*.

(*a*) (*b*)

Figura 1. Diagramma a zig zag di "cose poligame e poliandriche" [PU 8] (a) e ciclo yin/yang [PU 12] (b).

Uno dei maggiori interessi de *Les portes sur l'univers* consiste in come Grothendieck applica *implicitamente* alle sue analisi molte delle grandi metodologie della sua opera matematica (fasci, schemi, omologie, geometrie, combinatorie). Effettivamente, molti dei temi trattati nel suo testo fanno riferimento a incollature, inversioni, estratti, pause, soglie: *(i)* variazioni, gradi, intensità, fra il caldo (*yin*) e il freddo (*yang*) [PU 16–17]; *(ii)* inversioni, associate per sottogruppi, fra contenente e contenuto, astrazione (*yang*) e concrezione (*yin*) [PU 19–20]; *(iii)* dialettica molteplicità/unità ("Io stesso mi sento come un multiplo alla ricerca dell'unità") [PU 23]; *(iv)* diagrammi (esagoni, icosaedri, alberi) per catturare le tonalità (*yin*/*yang*) [PU 28–32]; *(v)* dinamiche fra l'ideale (*yang*) e il reale (*yin*) [PU 36–37]; *(vi)* iterazioni di zig zag e omologie fra unità/mistero (*yin*) e ordine/semplicità (*yang*) [PU 37–40]; *(vii)* tensione fra scoperta (*yin*) e invenzione (*yang*); *(viii)* fisarmonica fra esterno (superficie, luce, *yang*) e interno (profondità, ombra, *yin*) [PU 51–55]; etc. Per quanto l'essenziale in questa costruzione di "maglia ogni volta più stretta, di strutture più e più fini" [PU 64], per aiutare ad apprendere il mondo, sorge nel *processo* stesso delle *mediazioni*, è notevole che gli aspetti *yin* risultino essere i più interessanti dal punto di vista creativo. Di fatto, Grothendieck considera sempre la sua componente *yin* – ingenua, infantile, femminile – come il costituente essenziale della ricchezza della sua opera.

"Lo spirito, lanciato all'inseguimento dell'elusiva carne delle cose, va come un Ahab dietro la Balena Bianca" [PU 66]: per questo bisogna saper *dimenticare* e *ascoltare* come bambini [PU 71–72], bisogna avvicinarsi a una *lingua-madre* di emozioni e dolori, a una *lingua-immagini* di fantasticheria e immaginazione, che si apra a una "libertà creativa infinita" [PU 83–89]. L'incessante ricerca in Grothendieck di *archetipi matematici* (diseguaglianza di Grothendieck, gruppo della *K*-teoria, topos classificatori, gruppo di Galois assoluto, omotopia universale etc.) si riflette in questa allusione a *Moby Dick*, espressione letteraria per eccellenza dell'interminabile ricerca di quegli strati metafisi che ci superano. Cosciente del fatto che uno dei compiti essenziali della matematica consiste nel *rendere visibile l'invisibile* (coincidendo una volta più con la filosofia romantica, si pensi allo *Schema generale* di Novalis, 1799), Grothendieck traccia in *Les portes sur l'univers* un delicato reticolo di mediazioni fra il cuore profondo dell'immaginazione matematica e i diversi supporti razionali dell'edificio.

L'immaginazione visuale del grande matematico propone un grazioso anello di relazioni *yin*/*yang* [PU 46] e si scioglie soprattutto nella sezione finale del testo (si veda la nostra *Appendice* per una descrizione più precisa di tutto il documento). Qui, Grothendieck propone ventinove gruppi affini (o "porte") di coppie *yin*/*yang*, sintetizzati in armature diverse (fiori [PU 98, 105], albero [PU 110], finestra [PU 114], bi-icosaedro [PU 126], si veda la Figura 2). L'emozione (*yin*) e il pensiero (*yang*) si respingono e si attirano l'un l'altro, tanto nei distinti versanti dell'albero, quanto nelle soglie e aperture che danno luogo a una finestra "sull'universo".

Lungo tutto il documento, Grothendieck cerca di esplicitare inversioni e simmetrie (*connessioni tipo Galois*), così come distribuzioni e moltiplicazioni (*ramificazioni tipo Riemann*). Poiché un approccio ragionevole per capire Grothendieck è quello di intenderlo come *unificatore profondo di Galois e Riemann* [identità conseguita nelle sue tre linee visionarie della conferenza di Edimburgo: "La coomologia di Weil deve essere definita per mezzo di (…) connessioni fra coomologie di fasci e coomologie di gruppi di Galois, da una parte, e classificazione di ricoprimenti non ramificati di una varietà, dall'altra parte", germe della topologia étale (Grothendieck, 1958, 104)], risulta di sommo interesse notare che *Les portes sur l'univers* anticipa anche questo programma di unificazione, a livello di apporti metodologici. La riflessione di Grothendieck coincide così con le forze più significative della sua opera matematica, alla ricerca ("come un Ahab dietro la Balena Bianca") di una elusiva armonia universale.

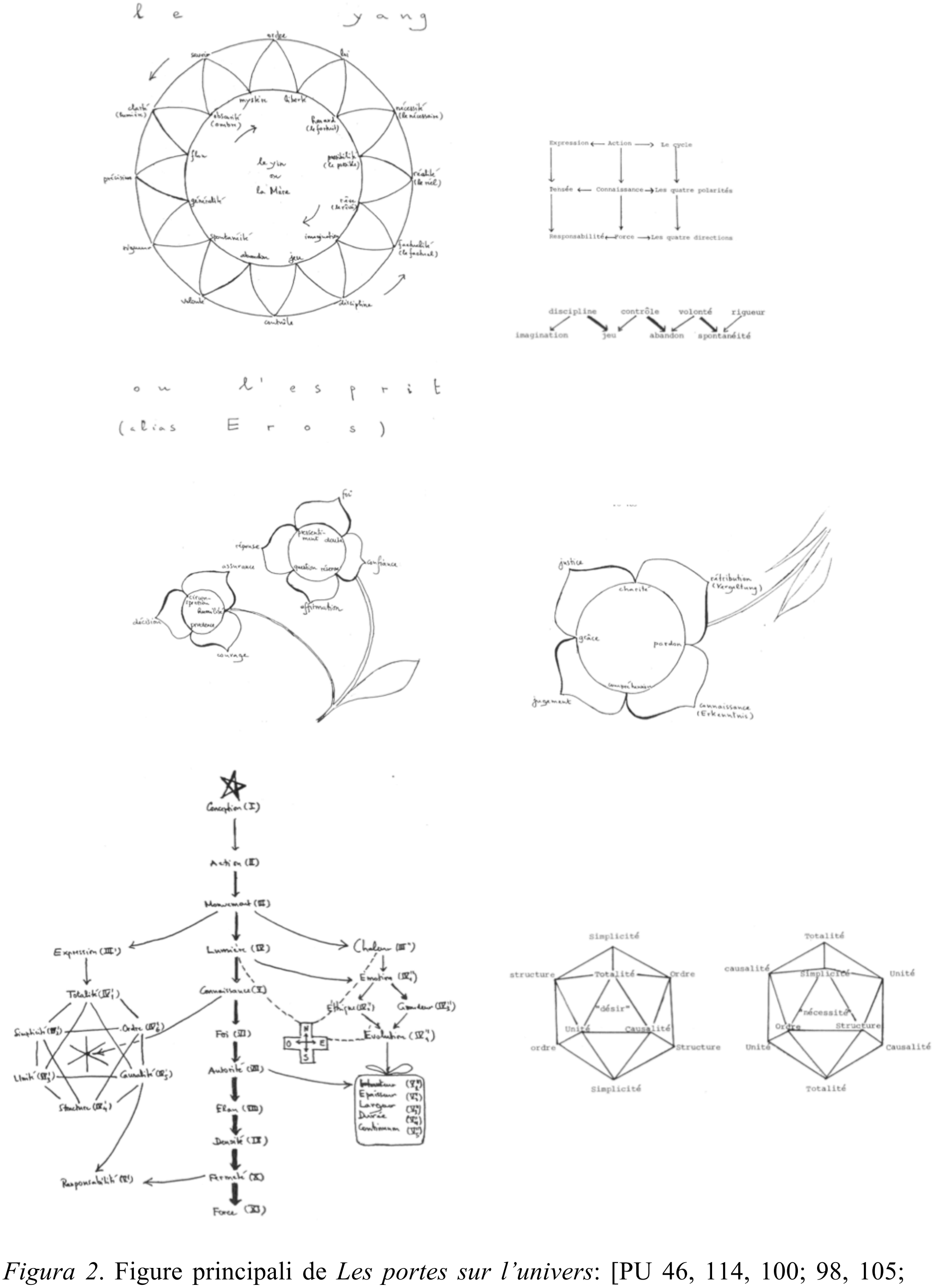

Figura 2. Figure principali de *Les portes sur l'univers*: [PU 46, 114, 100; 98, 105; 110, 126] da sinistra a destra, dall'alto in basso.

3. Grothendieck attorno al 1955: uno studio di caso

Il 1955 è l'anno cruciale che Grothendieck definì come il momento del suo "passo dall''analisi' alla 'geometria'" (Grothendieck, 1985-86, Parte 0, 26), che avrebbe prodotto, negli anni sessanta, i suoi monumenti di rinnovamento della geometria algebrica. Dall'analisi della creatività presente in *Les portes de l'univers*, ci concentreremo brevemente in questo paragrafo sulle espressioni fondamentali di questo cambio, rintracciabili in tre lavori eccezionali situati attorno al 1955: (1) *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques* (scritto nel 1953, pubblicato a Sao Paulo nel 1956) (Grothendieck, 1956), d'ora in avanti denominato "*Resumé*"; (2) *Sur quelques points d'algèbre homologique* (scritto nel 1955, pubblicato sulla rivista *Tôhoku* nel 1957) (Grothendieck, 1957a), d'ora in poi denominato "*Tôhoku*"; (3) *Rapport Riemann-Roch* (scritto nel 1957, pubblicato come: Borel, Serre, 1958) (Grothendieck 1957b), d'ora in poi denominato "*Rapport*".

Situamoci nei due seguenti *diagrammi a zig zag* di "cose poligame e poliandriche" nelle quali, come sempre succede in *Les portes sur l'univers*, le sfumature *yang* si trovano nella linea superiore e si proiettano nelle sfumature *yin* della linea inferiore (Figura 3).

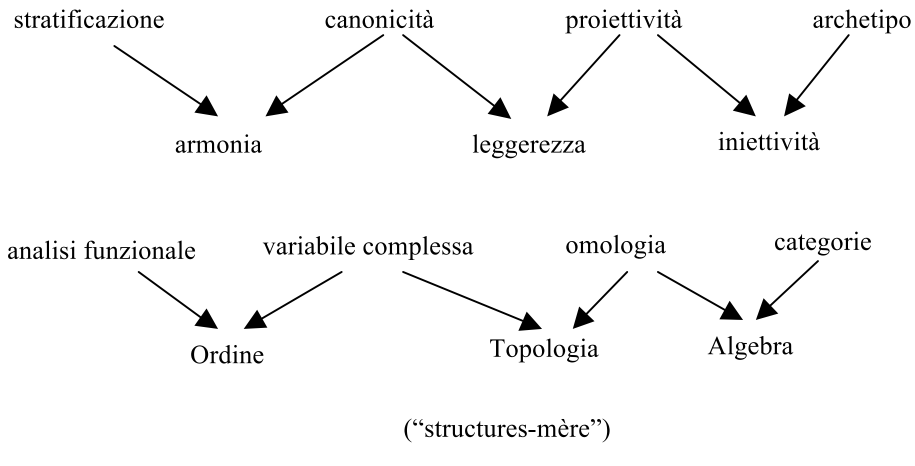

Figura 3. Alcuni temi yin-yang nel *Resumé*, nel *Tôhoku* e nel *Rapport*.

Il *Résumé* merita di essere visto come una delle più straordinarie espressioni dello *spirito unitario* di Bourbaki, nel quale si congiungono in maniera stupefacente le tre "strutture madri" proposte per il gruppo: Ordine, Topologia, Algebra. In effetti, quando Grothendieck scrive il suo *Résumé* a Sao Paolo, un solo semestre dopo aver difeso il suo dottorato, esplodono alcune delle idee generali della tesi (Grothendieck, 1955), dando luogo a una visione nuova delle *proprietà strutturali delle classi* (ancora non chiamate "categorie") di spazi di Banach e di Hilbert, sotto una *tripla prospettiva*, attenta a disuguaglianze fra norme tensoriali, strutture analitiche e fattorizzazioni algebriche. Grothendieck propone di esplorare *tutte* le norme "ragionevoli" (cioè per le quali le forme bilineari canoniche posseggono norma minore di 1) su prodotti tensoriali di spazi di Banach (Grothendieck, 1956, p. 8). La strategia è affascinante: *(i)* trovare norme canoniche comparabili, *(ii)* trasformare queste norme, *(iii)* fornire un panorama completo grazie a gerarchizzazioni strutturali. I tre livelli generali posseggono a loro volta sottolivelli specifici di comprensione: (A) alla maniera di Bourbaki abbiamo *(i)* ordine, *(ii)* topologia, *(iii)* algebra; (B) dal punto di vista semiotico abbiamo *(i)* semantica, *(ii)* sintassi, *(iii)* pragmatica; (C) dal punto di vista fenomenologico abbiamo *(i)* continuità, *(ii)* separazione, *(iii)* relazioni (Merleau-Ponty, 1964/2004a, 1964/2004b); (D) dal punto di vista musicale – qualcosa di essenziale per Grothendieck, che fu in dubbio (!) fra essere matematico o musicista – abbiamo *(i)* tema, *(ii)* variazioni, *(iii)* fuga. Si osservi che queste terne di aspetti corrispondono a *triangolazioni* in cui i diagrammi piani della Figura 3 sembrano coprire omologicamente due specie di "tori" nello spazio, ottenuti nell'annodare, in un *ciclo* di dimensione 3, gli estremi dei due diagrammi a zig zag.

Dalla sua tesi dottorale fino alla sua dimostrazione di Riemann-Roch generalizzato (cioè nell'intervallo di 4 anni che ha centro in quel 1955 che abbiamo scelto di analizzare in questo *Paragrafo*), Grothendieck individuò *proiettività e iniettività ovunque*: prodotti proiettivi e iniettivi (*Tesi*); norme proiettive e iniettive (*Résumé*); esistenza di sufficienti iniettivi in categorie abeliane con un generatore e assiomi di infinitezza, per poter ricostruire la coomologia a partire da funtori derivati (*Tôhoku*); sottospecializzazioni induttive della dimostrazione generalizzata di Riemann-Roch nei casi proiettivo e iniettivo (*Rapport*).

Proiettività e iniettività sono di fatto specializzazioni (spazializzazioni) di un punto di vista più ampio che risulterà essere centrale nel secondo periodo di Grothendieck (1958-1970), punto di vista con il quale cercherà di trovare *archetipi* profondi del sapere matematico. Molteplicità, diversità, *tipi* devono intendersi come *proiettati* dagli *archetipi* o, dualmente, *iniettati* in essi (si veda il primo diagramma a zig zag della Figura 3).

D'altra parte, gli andirivieni fra proiettività e iniettività nascondono un tema ancora più profondo di ricerche di *armonia e attenuazione*, a partire da strategie di *stratificazione e canonicità* (vedere di nuovo la Figura 3). In questo senso, I lineamenti del *Rapport* sono molto significativi. I temi della estensione di Riemann-Roch-Serre-Hirzebruch che propone Grothendieck possono essere riassunti in tre aspetti centrali: (1) *linearizzazione*: messa in evidenza della K-teoria mediante il gruppo $K(X)$ su una varietà (gruppo libero dei fasci coerenti su X); (2) *naturalizzazione*: visione delle classi di Chern e di Todd come trasformazioni "proiettive" di K su H^* (e ricostruzione della coomologia dall'*archetipo* "superiore" della K-teoria); (3) *relativizzazione*:

estensione dei risultati Serre-Hirzebruch al caso di un morfismo $f{:}X \rightarrow Y$ (variazione). La trasformazione naturale non commutativa fra $K(X) \rightarrow K(Y)$ e $H^*(X) \rightarrow H^*(Y)$, che deve essere adeguata mediante i controlli della *deviazione* delle classi di Todd, esprime in modo strutturale la formula di Riemann-Roch. La *stratificazione*, la *naturalizzazione*, l'*attenuazione* – tipiche dei modi d'operare di Grothendieck – permettono di ricostruire così i *tipi di spazio* (generi geometrici) e i *tipi di numero* (dimesioni algebriche) come parentele particolari che si proiettano dall'*archetipo* generale di *adattamento/disadattamento nel non commutativo*.

Il *Tôhoku* conta, da parte sua, con numerose concrezioni dei diagrammi a zig zag della Figura 3. Come avverte Grothendieck all'inizio del *Tôhoku*, l'articolo cerca di esplicitare un "quadro comune" che permetta di sostenerere l' "analogia formale" (Grothendieck, 1957a, p. 119) fra la coomologia a coefficienti in un fascio e la serie di funtori derivati da funtori di moduli. Il lavoro, iniziato nel soggiorno in Kansas nel 1955, si inserisce nel momento stesso in cui la nozione di fascio – *struttura armonica di attenuazione* nello studio dei transiti e ostruzioni fra il locale e il globale – entra a far parte irrinunciabile della ricerca matematica. Grothendieck procede nell'*inventare* (*yang*) il linguaggio (categorie addittive e abeliane) e a *scoprire* (*yin*) la ricchezza delle strutture matematiche (fasci, oggetti iniettivi, attraverso prodotti e somme infinite, azioni di gruppo) che spiegano l' "analogia formale" iniziale. In particolare, le azioni dei gruppi in gioco si *stratificano* in una precisa gerarchia di livelli-azione su uno spazio (primo) *X*, azione sopra un fascio (secondo) *O* di anelli su *X*, azione su un fascio (terzo) di moduli su *O*- concretizzando così una delle forme tipiche del processo grothendickiano. La copertura proiettiva dà luogo dunque alle diverse parti dell'articolo: (I) categorie abeliane (*linguaggio*); (II) algebra omologica in categorie abeliane e (III) coomologia con coefficienti su un fascio (*strutture*); (IV) calcolo di *Ext* per fasci di moduli e (V) coomologie con spazi di operatori (*trasferimenti* e *azioni*).

Da un punto di vista metodologico e filosofico, il *Tôhoku* produce cambi definitivi: (1) comprendere un oggetto attraverso la *categoria intera* dei suoi oggetti equivalenti, (2) intendere il concreto (coomologia, iniettivi) come ciò che è proiettato da *categorie astratte assiomatiche* (assiomi AB3-AB6, generatore, funtori iterati), (3) caratterizzare i processi di esistenza (*tipi* associati al quantificatore esistenziale $\exists$, *archetipi* associati al quantificatore esiste uno ed uno solo $\exists !$) e *invertire* le sue qualità "metafisiche" (tipi statici, archetipi dinamici, il che porta a un completo rinnovamento del logoro "platonismo" matematico – inversioni tipiche de *Les portes sur l'univers* applicate al primo diagramma della Figura 3). Il "quadro comune" che emerge dal *Tôhoku*, costruito per permettere lo studio di *legami naturali* (vedere la prima riga del secondo diagramma della Figura 3) fra la geometria algebrica, la topologia, la variabile complessa, i calcoli coomologici, modifica il panorama della matematica. Nel mettere a fuoco i suoi sforzi su un concetto/oggetto matematico *perno* (il fascio matematico), al definire gli intorni generali nei quali i fasci possono essere studiati nella loro unità/moltiplicità (le categorie abeliane) e al porre tutto questo istrumentario al servizio della comprensione delle forme profonde delle strutture (le coomologie), Grothendieck produce di fatto non solo una "rivoluzione copernicana" ma una vera "rivoluzione einsteniana" (l'intendere la *matematica relativa* e i suoi *invarianti*), se ci è permesso forzare un po' la metafora.

4. Una relazione plastica fra creatività, accademia e docenza

L'esercizio che abbiamo realizzato nel *Paragrafo 2* indica come le prospettive de *Les portes sur l'univers* aiutano ad abbattere e reintegrare la "abracadabrante" molteplicità della *tecnica matematica* grothendickiana. In realtà, come sempre succede con Grothendieck, i temi in gioco eccedono la finezza locale delle teorematiche e si aprono ad un'immensa ricchezza globale, dove la *leggerezza* e la *naturalità* degli ambienti aiutano a superare i muri artificiali della comprensione. In questo *Paragrafo* approfitteremo della *plasticità* dello spirito grothendickiano, e alcune piste de *Les portes sur l'univers*, per tratteggiare brevi riflessioni sulla *necessità* di una relazione che si divide in tre componenti fra *(i)* una dinamica emergente (*yin*) di impulsi creativi, *(ii)* la stabilità architettonica accademica (*yang*) di questi impulsi, *(iii)* l'adeguata trasmissione docente di questa tensione fra pulsione sensibile e comprensione intellegibile.

Grothendieck pensò sempre a molteplicità che avrebbero, nella misura del possible, cercato di vedersi come unità [si ricordi la sua percezione di sé stesso: "Mi sento io stesso come un multiplo alla ricerca dell'unità" (PU 23)]. Questo risulta essere il senso essenziale della teoria delle categorie: le diverse regioni della matematica si reintegrano grazie a definizioni "universali" (usi sistematici del quantificatore $\exists!$), dove la diversità relazionale (morfismi) si proietta dall'unità. Uno degli interessi di questa visione consiste nell'apprendere a saltare muri ("Saltare a piedi giunti sopra i calcoli", diceva Galois) e, così, *superare le apparenze* (per esempio, oggetti tanto diversi come l'insieme vuoto, un gruppo unitario, un minimo in un insieme ordinato, o l'anello degli interi, possono essere visti tutti come istanziazioni di uno stesso concetto astratto: l'oggetto iniziale di una categoria, per il quale solamente *esiste un unico* morfismo per qualsiasi altro oggetto della categoria). L'idea è talmente semplice quanto profonda: le ostruzioni nel *particolare* si superano nell'innalzarsi a un livello di transito *generale* più alto, dal quale quel che appariva come un blocco si vede ora come una connessione. *L'invisibile si trasforma in visibile*. Da un punto di vista metodologico, si tratta di una concezione profondamente *pragmatica* del sapere, che celebra la ricchezza *differenziale* di ciascun contesto ma che, inoltre, seguendo la massima pragmatica di Peirce (rifondatore moderno tanto del pragmatismo, quanto della semiotica) permette spesso di *reintegrare* i differenziali all'interno di una visione globale più ampia, non riduzionista, non settaria, non ristretta unicamente al locale [per uno studio tecnico preciso dei legami fra la teoria delle categorie e il pragmatismo di Peirce, si veda Zalamea (2008, 2010)].

La pluralità richiede *plasticità* e, in particolare, la *rete plurale* degli alti e bassi fra immaginazione, ragione e contrasto (in accordo con Peirce (1) abduzione, (3) deduzione e (2) induzione – gli indici numerali invertiti si riferiscono alle "categorie cenopitagoriche" di Peirce) richiede un'importante *apertura mentale*. Per fortuna, tanto la matematica in sé, quanto la molteplicità degli sguardi a essa diretti (storia, filosofia, docenza etc.), riflettono spesso questa apertura mentale. Bruno D'Amore ha ripetutamente insistito sulla ricchezza della *commistione*: la didattica come "*ars*" è allo stesso tempo *arte* e *artigianato* (D'Amore, 2005, p. 11), la sensibilità "artistica" e la motivazione singolare del maestro sono importanti, però solo se si capiscono l'ambiente "artigianale" di creazione *comunitaria* che le uniscono. La rete, l'artigianato, la comunione pragmatica sono fondamentali per la *vita sana* della matematica, come sapeva perfettamente Grothendieck, lo studioso della teoria delle categorie, il pensatore delle stratificazioni complesse del *yin*/*yang*, il maestro dedito, l'ecologista appassionato. Esiste di fatto una tradizione profondamente umana nella matematica, che converte la disciplina a un frammento delle umanità e che Cavaillès citava nel *calembour* che definisce la matematica come "scienza storica per eccellenza". D'Amore rilegge e reinventa magnificamente questa tradizione nel suo *Dante*, facendoci *sentire* come il "terribile infinito" incarna nel conteggio incessante dei numeri naturali fatto da Manlio e dai suoi eredi di generazione in generazione (D'Amore, 2011, pp. 45–46), e nel farci *vedere* come l'astrazione (infinità matematica) si intreccia indissolubilmente con il conglomerato umano (generazioni di esseri recitanti).

In realtà, procediamo nel fondo di Novalis, il giovanissimo e geniale poeta, ma, soprattutto, il più brillante pensatore della modernità (Novalis, 1799, 1993). Sulla base delle opposizioni inevitabili dell'esperienza, una dialettica superiore permette a Novalis di reintegrare le differenze e, in vari punti dello *Schema Generale* (Novalis, 1799), si giunge a parlare della filosofia come un *calcolo differenziale e integrale astratto*. Novalis esplicita alcune delle aporie fondatrici del sapere: "Antinomia dell'intenzione, o del progetto – e del risultato – o del processo. Antinomia del concetto – e dell'ogetto. Antinomia della dimostrazione – della risoluzione etc." (Novalis, 1993, vol. II, p. 403). Il suo idiosintratico *lungo copione*, onnipresente in tutte le sue riflessioni, evoca una *linea* di unione fra gli opposti. Il fine (risultato, oggetto, soluzione) e il mezzo (processo, concetto, dimostrazione) si contrappongono, per quanto a volte si richiamino l'un l'altro e si uniscano nel lungo copione, *ponte* *sull'abisso* e simbolo di una sintesi nello spazio-tempo. L'unità si esprime in un "*appetitus sensitivus e rationalis*" che desidera "*tutto e subito*" e che si proclama "opposto al principio di contraddizione" (Novalis, 1993, vol. II, p. 448). A partire da un incollamento dei contrari, Novalis mostra come le rappresentazioni dell'*immaginazione creativa si tri*-compone di ragione, giudizio e sensibilità. Sorge così una "*forma poetica del mondo*" che rompe con i compartimenti stagni e che affronta sistematicamente le *osmosi* della conoscenza. L' "Essere limitati e illimitati allo stesso tempo" e "Essere legati, in modo infinito, con il transmondano" (Novalis, 1993, vol. II, p. 449) formano parte di una *condizione aperta* che spinge ed esalta l'azione dell'essere umano.

Non altro è stato il programma di Grothendieck, convertito in una favolosa esplosione di nuovi "enti" matematici [ben a ragione, Grothendieck si sentiva orgoglioso di aver introdotto più di un *migliaio* (!) di nuove definizioni matematiche – qualcosa di quasi inimmaginabile, quando un normale matematico può sentirsi forse contento di aver proposto *una* nuova definizione nella sua disciplina]. La rottura dei compartimenti stagni, il passaggio fra il possible e il dato, l'andirivieni fra variazione e invarianza, è uno dei grandi punti di forza della matematica. Quando la docenza si prende realmente sul serio, come ci hanno insegnato Bruno D'Amore e la sua scuola, tutta questa plasticità relativa alla creatività matematica – specialmente visibile in *Les portes sur l'univers* – deve riflettersi nel gesto *comunitario* del maestro. Dobbiamo pertanto superare i nostri limiti intrinseci, abbozzarci come frammenti di una comunità, *aprire le porte dell'universo* e realmente *vivere* la molteplicità del pensiero umano, magnificamente indicizzato nella varietà del pensiero matematico.

Rigraziamenti

A Bruno D'Amore: (1) per i suoi insegnamenti, per il suo esempio, per la sua visione di un mondo amplio nel quale l'intelligenza non può essere sezionata, (2) per la sua generosa e attenta traduzione di questo testo all'italiano.

Riferimenti bibliografici

Borel, A., & Serre, J.-P. (1958). Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck). *Bulletin de la Société Mathématique de France*, *86*, 97–136.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona/Bogotá: Reverté.

D'Amore, B. (2011). *Dante e la matematica*. Firenze: Giunti.

Grothendieck, A. (1955). *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. American Mathematical Society Memoirs, *16*, 1955 (Thèse Doctorale, Nancy, 1953).

Grothendieck, A. (1956). Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo*, *8*, 1–79.

Grothendieck, A. (1957a). Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. Journal*, *9*, 119–221.

Grothendieck, A. (1957b). Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch. *SGA*, *6*, 20–71.

Grothendieck, A. (1958). The cohomology theory of abstract algebraic varieties. *Proceedings International Congress of Mathematics Edinburgh 1958* (pp. 103–118). Cambridge: Cambridge University Press, 1960.

Grothendieck, A. (1985-86). *Récoltes et Semailles*. Montpellier.

Merleau-Ponty, M. (2004a). *L'Oeil et l'Esprit*. Paris: Gallimard. (Originariamente pubblicato nel 1964).

Merleau-Ponty, M. (2004b). *Le visible et l'invisible*. Paris: Gallimard. (Originariamente pubblicato nel 1964).

Novalis (1799). *La Enciclopedia*. Caracas/Madrid: Fundamentos, 1976.

Novalis (1993). *Opera Filosofica*. Torino: Einaudi.

Zalamea, F. (2009). *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. (*Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics*. New York: Sequence/Urbanomic, 2012).

Zalamea, F. (2010). A category-theoretic reading of Peirce's system: Pragmaticism, continuity, and existential graphs. In M. Moore (Ed.), *New Essays on Peirce's Mathematical Philosophy* (pp. 203–233). Chicago: Open Court.

APPENDICE: Un riassunto de *Les portes sur l'univers*

In quel che segue, i riferimenti numerici fra parentesi corrispondono alle pagine del manoscritto [PU] (*Les portes sur l'univers*) (1986) – Appendice di *Récoltes et semailles* (Grothendieck, 1985-86).

Sezione 1 (1-7). Le roc et les sables. Inizi 1979, visione 1984, realizzazione finale Marzo/Aprile 1986. Coppie *yin-yang*, grafi di coppie ("combinatoria o topologia") (1-2). Universalità, realtà (3-4). Tagli e piegamenti, tipografia e topografia, legami medi e struttura globale ("albero di Natale" e varianti) (5-6).

Sezione 2 (7-9). Choses polyandres et choses polygames. Coppie archetipiche legate a nomi (7). Poligamia (uno *yang* legato a due *yin*, figlio con madre e vecchio – sole con luna e terra) e poliandria (uno *yin* legato a due *yang*, madre con padre e figlio – terra con sole e cielo) (7-8). Diagramma a zig zag: potenza/energia/materia/spirito/corpo (8).

Sezione 3 (9-12). L'ambiguité créatrice (1): paires, rimbambelles et rondes. Ambiguità del *yin* e dello *yang*: sovrapposizioni, cambi di prospettiva (9-10). Code (11) e giri rotondi (12): collegamenti variabili di *yin/yang*. Un anello poetico nell'*Elogio dell'Incesto*: apprendista-equipaggio-nave-fiume-mare-apprendista ("nei cui occhi si riflette il mare e penetra nella sua anima") (12).

Sezione 4 (13-15). L'ambiguité créatrice (2): le renversement des rôles. Coppie *yin/yang*: "cosmiche" o "universali" (essenziali) versus "occasionali" (ambiguità non essenziali) (13). Cartografia metodica (13). Inversioni nel *yin/yang*: momenti di creatività (14). Dominanze e tonalità (14). "L'immagine della Madre (...) l'incarnazione più completa e profonda del *yin*" (15).

Sezione 5 (15-16). L'ambiguité créatrice (3): la partie contient le Tout. Coppia: parte (*yang*) / Tutto (*yin*) (16). Processo di riflessione: "molto spesso, la *parte* riflette il *Tutto*, e pertanto lo contiene, così come è contenuta in esso" (16). Esempi di riflessione: uomo, corpo, volto, voce, mano – sostegno di tecniche divinatorie (16).

Sezione 6 (16-18). L'ambiguité créatrice (4): les extrêmes se touchent. Coppia: caldo (*yang*) / freddo (*yin*) (16). Variazioni, gradi, intensità, inversione: il caldo estremo si converte in *yin*, il freddo estremo si converte in *yang*, "Gli estremi si toccano" (17). "Immagine ingénue" del cerchio per rappresentare i movimenti e le inversioni *yin/yang* (18).

Sezione 7 (18-21). Mes perplexités "contenant – contenu" et "le lourd – le léger". Coppie delicate, non ben definite, paradossali etc. (19-20). Inversioni, associazioni per sottogruppi (19-20). Andirivieni fra contenente e contenuto (19), fra astratto e concreto (20). "Il gioco di analogie, guida preziosa e indispensabile (…) non è infallibile, richiede cautela e prudenza" (20).

Sezione 8 (21-23). La quête de l'unité. Correlazioni (non equivalenti) fra le coppie: particolare/generale, astratto/concreto (21). Importanza dei gradi di astrazione in matematica, legame permanente di particularità e generalità (22). Coppia basica: molteplicità/unità (23), "Mi sento io stesso come un multiplo alla ricerca dell'unità" (23).

Sezione 9 (23-27). Généralité et abstraction – ou le prix à payer. Nivelli e soglie di astrazione (24). Ricerca di generalità e unità ("immersione profonda", 25), per la quale c'è da pagare il prezzo dell'astrazione (unità - *yin* versus astrazione - *yang*) (25-26). Limiti della ricerca scientifica: separazione, esplosione, divergenza (27).

Sezione 10 (27-31). Histoires d'icosaèdres et d'arbres de Noël. Enumerazione di ricerche per arrivare a "una percezione *formale* o *matematica* globale dell'insieme di coppie *yang/yin*" (27). Desiderio di costruzioni "canoniche" e "naturali" (28). "È un peccato che Kepler non sia qui a leggermi" (30). Grafi, esagoni, icosaedri (28-29) e alberi di Natale (30).

Sezione 11 (31-34). Désir et nécessité – ou la voie, et la fin. Riflessioni notturne (23, 27, 31, 37, 41 etc.). Gruppi di coppie che favoriscono il pensiero: poli, attrattori, dinamica, tonalità *yin/yang* (31-32). Viavai essenziale tra sintesi e analisi, differenziazione e unità (33). Dopo la comprensione nell'ordine del Tutto, "i nostri *occhi* non sono più gli stessi" (34).

Sezione 12 (34-37). Précision et généralité – ou la surface des choses. Movimenti del pensiero: diagramma a zig zag fra termini *yang* (purezza, il particolare, il preciso, il chiaro, il conosciuto, sapere) e termini *yin* (fecondità, il generale, il vago, l'oscuro, il misterioro, conoscenza) (35-36). Dinamiche e inversioni (36), idealità e realtà (sogno, profondità) (37).

Sezione 13 (37-41). L'harmonie – ou les épousailles de l'ordre et du mystère. Iterazione del zig zag (omologie nascoste!) a sette qualità *yang* e otto *yin*, relazionate con un andirivieni progressivo, fra immaginazione e mistero (37). Legame fra unità e mistero (*yin*) / ordine e semplicità (*yang*), sotto un'armonia profonda di ombra e luce, attraverso lo stesso spirito umano (40).

Sezione 14 (41-46). Le caractériel et le caractéristique – ou l'Accordéon cosmique. Il Sognatore regala l'immagine (= "realtà tangibile", 42) della "fisarmonica" per rappresentare l'interminabile zig zag *yin*/*yang* (41). Più sogni (42). "Nuove note impreviste nel pensiero esploratore" (43). Estensione del zig zag e collegamento circolare (45): DISEGNO DELLA FISARMONICA COSMICA (46).

Sezione 15 (47-51). Découverte ou "invention"? – ou le scribe et "l'Autre". Invenzione o scoperta delle figure? (47). Scoperta matematica (47). Studio matematico delle figure: base di termini, grafi orientati (che portano all'icosaedro) (49), strutture affini (che portano alla fisarmonica/fiore) (50). Nascita creativa dal limbo, la mano dello scriba è guidata dall'Altro (51).

Sezione 16 (51-57). La Fleur et son mouvement – ou: plus je m'éloigne, plus je m'approche. Analisi della fisarmonica/fiore cosmico: petali, monti, valli, declivi (51-52). Interno del fiore (*yin*): parte feconda, granulare (55). Esterno del fiore (*yang*): spirito (55). Dinamica: dall'esterno (superficie, luce) all'interno (profondità, ombra) (55). Espansione di cammini: da fiori piatti a fiori sferici (56).

Sezione 17 (57-61). Chaos et liberté – ou les soeurs terribles. Sparizione del caos nel fiore cosmico (59): caos e libertà possono essere considerate "anti-attrattori" all'interno del sistema dinamico generale (59). Sospetti sulla libertà: carattere "necessario" della ricerca scientifica (59-60). "Orrore" del caos: è una "semplice apparenza" dietro la quale emerge un ordine (61).

Sezione 18 (62-64). Le vague et le précis – ou l'épuisette et la Mer. Attrattori *yang* subordinati a semplicità e ordine: astrazione, precisione, struttura (62). Andirivieni fra precisione e vaghezza, non riconoscimento e conoscenza, mistero e ordine (63). "Cosa folle (…) nulla appare di questo movimento" (63). Censura "implacabile" del "mare di nebbia senza fondo e senza limiti" (63-64).

Sezione 19 (64-65). Ordre et structure – ou l'esprit de précision. Comprensione di una sostanza attraverso "le reti ogni volta più strette, di strutture più e più fini che si *incollano* alla sostanza" (64). Ricerca di strutture: modalità privilegiata dello spirito di precisione (= "spirito di geometria" di Pascal) (64-65).

Sezione 20 (66-68). L'abstrait et le concret (1): naissance de la pensée. "Lo spirito, lanciato all'inseguimento dell'elusiva carne delle cose, va come un Ahab dietro la Balena Bianca" (66). Versus una paura dell'astrazione (ripugnanza a "cambiare di piano", 66), il linguaggio e l'atto di "nominare", paradigmi dell'astrazione, costituiscono l' "*atto archetipico* dello spirito" (67).

Sezione 21 (68-71). L'abstrait et le concret (2): le miracle de la simplicité.

Contro i pregiudizi comuni, l'astrazione è il mezzo per apprendere e chiarificare il semplice dentro il complesso (69). Essenziale ricchezza astrattiva dell'elisse sul cerchio (71). Correlazione inversa fra fondo (comprensione, livelli di profondità) e forma (espressione astratta, livelli di elevazione) (69).

Sezione 22 (71-78). L'abstrait et le concret (3): les strates du langage – ou la peau et l'étreinte. "L'ebrezza della scoperta non è privilegio del gigante (…) ma del bambino" (71). "*Dimenticare* (…) *ascoltare*": chiave dell'invenzione (72). "La grandezza di Riemann" si deve a un pensiero vasto: matematico e filosofico, in grado di compiere astrazioni e ingenuo (74-75). Relatività e stratificazione della nozione di astrazione (76-77).

Sezione 23 (78-82). Abstraction et sens – ou le miracle de la communication. Il contrario dell'astrazione: sterilità di un gioco fatto per piacere (78). Pericolo di "*perdere contatto con il concreto*" (79). Senso: trasformazione e risonanza di "nubi" fra emittenti e riceventi (80-82). "La mia responsabilità (…) è di essere realmente presente e di essere *vero* in quel che faccio" (82).

Sezione 24 (83-92). La langue des images – ou le chemin de retour. Attraverso le parole e i linguaggi usuali, esiste una "lingua madre" di emozioni e dolori (83-84), una "lingua-immagini" di suoni e immaginazioni (85-86), di corpo e percezione (87), di danza evita (88), intima e personale (86), che si apre a una "libertà creativa infinita" (89) – guidata dal Sognatore (92).

Sezione 25 (93-127). Les portes sur l'univers. (A) (93-108). Portes et trous de serrure (répertoire). Ventinove gruppi affini (o "porte") di coppie *yin*/*yang*. DISEGNO DI FIORI (a tre e quattro petali) legati al gruppo "Fede" (98). DISEGNO DI UN FIORE (a quattro petali) legato al gruppo "Responsabilità (o Karma)" (105).

Sezione 25 (93-127). Les portes sur l'univers. (B) (108-111). L'arbre. Lato destro (occhi sull'albero, sinistra sulla carta): *yang* – pensiero (nostra "ragione") (109). Lato sinistro (occhi sull'albero, destra sulla carta): *yin* – emozione (nostro cuore, corazón, co/razón co/ragione) (109). DISEGNO DELL'ALBERO (110).

Sezione 25 (93-127). Les portes sur l'univers. (C) (111-114). La fenêtre. Derivazione di nove spiragli dentro l'abero: espressione, pensiero, responsabilità (111), quattro direzioni (111), quattro polarità (112), ciclo (113), azione, conoscenza, forza (113), inglobati tutti dentro un DISEGNO DI FINESTRA (omologia) sull'universo (114).

Sezione 25 (93-127). Les portes sur l'univers. (D) (114-127). Le bi-icosaèdre. "Coppia di due strutture di icosaedro sull'esagramma pensiero": canonicità e complementarità *yin*/*yang* (114). DISEGNO DI STRUTTURA BI-ICOSAEDRICA per il pensiero-*yin* e il pensiero-*yang* (126).

[Traduzione di Bruno D'Amore]